CUCEA

Programación por metas

Formulación de problemas

Variables de desviación

d_1^- = logro de menos del objetivo de la utilidad
d_2^+ = logro de más del objetivo de la utilidad

Ejemplo 1

Fairville es una ciudad pequeña con 20,000 habitantes. El consejo de la ciudad está en vías de desarrollar una tabla equitativa de impuestas urbanos, la base impositiva anual para la propiedad catastral es $550 millones, las bases impositivas anuales para alimentos y medicinas son $35 millones y para ventas en general es $55 millones, el consumo local anual de gasolina se estima en 7.5 millones de galones. El consejo desea establecer las tasas de impuesto basándose en cuatro metas:

1. Los ingresos impositivos deben ser de $16 millones, cuando menos, para satisfacer los compromisos financieros municipales.
2. Los impuestos en alimentos y medicinas no pueden ser mayores que el 10% de todos los impuestos recabados.
3. Los impuestos por ventas en general no pueden ser mayores que el 20% de todos los impuestos recabados.
4. El impuesto a la gasolina no puede ser mayor que 2 centavos por galón.

Solución:

Sean las variables x_p, x_f y x_s las tasas impositivas para el catastro, alimentos y medicinas y ventas en general; se define la variable x_g como el impuesto a la gasolina, en centavos por galón. Las metas se expresan como sigue:

$$550x_p + 35x_f + 55x_s + 7.5x_g \geq 16$$

$$35x_f \leq 0.1(550x_p + 35x_f + 55x_s + 7.5x_g)$$

$$55x_s \leq 0.2(550x_p + 35x_f + 55x_s + 7.5x_g)$$

$$x_g \le 2$$

$$x_p, x_f, x_s, x_g \ge 0$$

Se simplifican las restricciones

$$550x_p + 35x_f + 55x_s + 7.5x_g \ge 16$$

$$55x_p - 31.5x_f + 5.5x_s + 0.75x_g \ge 0$$

$$110x_p + 7x_f - 44x_s + 0.15x_g \ge 0$$

$$x_g \le 2$$

$$x_p, x_f, x_s, x_g \ge 0$$

Cada una de las desigualdades del modelo representa una meta que el consejo municipal desea satisfacer. Sin embargo, lo más que se puede hacer es buscar una solución de compromiso entre estos planes contrapuestos. La forma en que la programación por metas determina una solución de compromiso es convirtiendo cada desigualdad en una meta flexible, en la que la restricción correspondiente puede violarse si es necesario. En el modelo de Fairville, las metas flexibles se expresan como sigue:

$$550x_p + 35x_f + 55x_s + 7.5x_g + d_1^- - d_1^+ = 16$$

$$55x_p - 31.5x_f + 5.5x_s + 0.75x_g + d_2^- - d_2^+ = 0$$

$$110x_p + 7x_f - 44x_s + 0.15x_g + d_3^- - d_3^+ = 0$$

$$x_g d_4^- - d_4^+ = 2$$

$$x_p, x_f, x_s, x_g \ge 0$$

$$s_i^+, s_i^- \ge 0$$

Ejemplo 2

La Harrison Electric Company, localizada en el área antigua de Chicago, produce dos productos muy apreciados por los restauradores de casas: candelabros y ventiladores de techo de estilo antiguo. Tanto los candelabros como los ventiladores requieren un proceso de producción de dos pasos que implican cableado eléctrico y ensamble. Se requieren 2 horas para cablear cada candelabro y 3 para un ventilador de techo. El ensamble final de los candelabros y ventiladores requiere de 6 y 5 horas, respectivamente. La capacidad de producción es tal que sólo están disponibles 12 horas de cableado y 30 de ensamble, si cada candelabro producido reditúa a la firma $7 y cada ventilador 6$. Además, suponga que la firma se va a mudar a otro lugar durante un periodo de producción particular y considera que la maximización de la utilidad no es una meta realista, la administración establece que un nivel de utilidad de $30 sería satisfactorio durante ese periodo de ajuste.

Formule el PL para el problema.

Solución:

La decisión de mezcla de producción de Harrison puede ser formulada por medio de PL:

Maximizar la utilidad $= \$7x_1 + \$6x_2$

sujeta a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\ 6x_1 + 5x_2 &\leq 30 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Agregando la meta de minimizar el logro de menos o de más del objetivo de utilidad $= \quad d_1^- \quad - d_1^+$

sujeta a

$$\begin{aligned} \$7x_1 + \$6x_2 + d_1^- - d_1^+ &= \$30 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\ 6x_1 + 5x_2 &\leq 30 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Extensión a metas múltiples igualmente importantes

Examine ahora la situación en que la administración de Harrison desea alcanzar varias metas, cada una con igual prioridad.

Meta 1: producir una utilidad de $30 si es posible durante el periodo de producción

Meta 2: utilizar por completo las horas disponibles en el departamento de cableado

Meta 3: evitar el tiempo extra en el departamento de ensamble

Meta 4: satisfacer el requisito contractual de producir por lo menos 7 ventiladores de techo.

Solución:

Ahora se requiere:

Minimizar la desviación total = $d_1^- + d_2^- + d_3^+ + d_4^-$

sujeta a

$$
\begin{aligned}
\$7x_1 + \$6x_2 + d_1^- - d_1^+ &= \$30 \\
2x_1 + 3x_2 + d_2^- - d_2^+ &= 12 \\
6x_1 + 5x_2 + d_3^- - d_3^+ &= 30 \\
x_2 + d_4^- - d_4^+ &= 7 \\
x_i, d_i &\geq 0
\end{aligned}
$$

$d_1^- =$ logro de menos de la utilidad objetivo

$d_1^+ =$ logro de más de la utilidad objetivo

$d_2^- =$ tiempo ocioso del departamento de cableado

$d_2^+ =$ tiempo extra del departamento de cableado

$d_3^- =$ tiempo ocioso del departamento de ensamble

$d_3^+ =$ tiempo extra del departamento de ensamble

$d_4^- =$ logro de menos de la meta de ventiladores de techo

$d_4^+ =$ logro de más de la meta de ventiladores de techo

Clasificación de metas con niveles de prioridad

Suponga que Harrison Electric establece las prioridades

$P_1 =$ alcanzar la mayor utilidad posible por encima de $30

$P_2 =$ utilización completa de las horas disponibles en el departamento de cableado

$P_3 =$ evitar el tiempo extra en el departamento de ensamble

$P_4 =$ Producir por lo menos siete ventiladores de techo

Solución:

Agregando las prioridades mencionadas se tiene:

Minimizar la desviación total $= P_1 \quad d_1^- + P_2 d_2^- + P_3 d_3^+ + P_4 d_4^-$

sujeta a

$$
\begin{aligned}
\$7x_1 + \$6x_2 + d_1^- - d_1^+ &= \$30 \\
2x_1 + 3x_2 + d_2^- - d_2^+ &= 12 \\
6x_1 + 5x_2 + d_3^- - d_3^+ &= 30 \\
x_2 + d_4^- - d_4^+ &= 7 \\
x_i, d_i &\geq 0
\end{aligned}
$$

Solución del modelo mediante el método simplex

Se tiene la tabla inicial con las desviaciones y prioridades:

	x_1	x_2	s_1^+	s_2^+	s_3^+	s_4^+	s_1^-	s_2^-	s_3^-	s_4^-	z
P_1	$7P_1$	$6P_1$	0	0	0	0	P_1	0	0	0	$30P_1$
P_2	$2P_2$	$3P_2$	0	0	0	0	0	P_2	0	0	$12P_2$
P_3	$6P_3$	$5P_3$	0	0	$-P_3$	0	0	0	0	0	$30P_3$
P_4	0	P_4	0	0	0	0	0	0	0	P_4	$7P_4$
R_1	7	6	-1	0	0	0	1	0	0	0	30
R_2	2	3	0	-1	0	0	0	1	0	0	12
R_3	6	5	0	0	-1	0	0	0	1	0	30
R_4	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	1	7

De la primera prioridad se selecciona el valor de la variable más alta, siendo en este caso $7P_1$, entonces x_1 entrará en la base.

Se hará la prueba del cociente con los valores de x_1 , dando como resultado 7 con el cociente más pequeño y seleccionado para iniciar con el algoritmo simplex.

Se procede a convertir en 1 el 7 dividiendo todo el R_1 entre 7

	x_1	x_2	s_1^+	s_2^+	s_3^+	s_4^+	s_1^-	s_2^-	s_3^-	s_4^-	z
P_1	$7P_1$	$6P_1$	0	0	0	0	P_1	0	0	0	$30P_1$
P_2	$2P_2$	$3P_2$	0	0	0	0	0	P_2	0	0	$12P_2$
P_3	$6P_3$	$5P_3$	0	0	$-P_3$	0	0	0	0	0	$30P_3$
P_4	0	P_4	0	0	0	0	0	0	0	P_4	$7P_4$
R_1	1	$\frac{6}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	0	0	$\frac{1}{7}$	0	0	0	$\frac{30}{7}$
R_2	2	3	0	-1	0	0	0	1	0	0	12
R_3	6	5	0	0	-1	0	0	0	1	0	30
R_4	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	1	7

	x_1	x_2	s_1^+	s_2^+	s_3^+	s_4^+	s_1^-	s_2^-	s_3^-	s_4^-	z
P_1	0	0	P_1	0	0	0	0	0	0	0	0
P_2	$2P_2$	$3P_2$	0	0	0	0	0	P_2	0	0	$12P_2$
P_3	$6P_3$	$5P_3$	0	0	$-P_3$	0	0	0	0	0	$30P_3$
P_4	0	P_4	0	0	0	0	0	0	0	P_4	$7P_4$
R_1	1	$\frac{6}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	0	0	$\frac{1}{7}$	0	0	0	$\frac{30}{7}$
R_2	2	3	0	-1	0	0	0	1	0	0	12
R_3	6	5	0	0	-1	0	0	0	1	0	30
R_4	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	1	7

Ahora se procede a convertir en 0 todos los valores de la columna x_1 de la siguiente manera:

Para convertir en 0 x_1 en el R_2 , se multiplica el renglón 1 por el inverso aditivo del valor de x_1 , que en este caso es 2, y se suma al R_2 . El resultado se sustituye en una nueva tabla simplex en el lugar que corresponde al R_2 .

$$\begin{matrix} 7P_1 & 6P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_1 & 0 & 0 & 0 & 30P_1 \\ 2P_2 & 3P_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_2 & 0 & 0 & 12P_2 \\ 6P_3 & 5P_3 & 0 & 0 & -P_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30P_3 \\ 0 & P_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_4 & 7P_4 \\ 1 & \frac{6}{7} & -\frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & \frac{30}{7} \\ 0 & \frac{9}{7} & \frac{2}{7} & -1 & 0 & 0 & -\frac{2}{7} & 1 & 0 & 0 & \frac{24}{7} \\ 6 & 5 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{matrix}$$

Para convertir en 0 x_1 en el R_3 , se multiplica el renglón 1 por el inverso aditivo del valor de x_1 , que en este caso es 6, y se suma al R_3 .

$-6R_1 + R_3 = R_3^{'}$. El resultado se sustituye en una nueva tabla simplex en el lugar que corresponde al R_3 .

$$\begin{matrix} 7P_1 & 6P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_1 & 0 & 0 & 0 & 30P_1 \\ 2P_2 & 3P_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_2 & 0 & 0 & 12P_2 \\ 6P_3 & 5P_3 & 0 & 0 & -P_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30P_3 \\ 0 & P_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_4 & 7P_4 \\ 1 & \frac{6}{7} & -\frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & \frac{30}{7} \\ 0 & \frac{9}{7} & \frac{2}{7} & -1 & 0 & 0 & -\frac{2}{7} & 1 & 0 & 0 & \frac{24}{7} \\ 0 & -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} & 0 & -1 & 0 & -\frac{6}{7} & 0 & 1 & 0 & \frac{30}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{matrix}$$

Para convertir en 0 x_1 en P_3 , se multiplica el renglón 1 por el inverso aditivo del valor de x_1 que en este caso es - $6P_3$ y se suma a P_3 .

$-6R_1 + P_3 = P_3^{'}$. El resultado se sustituye en una nueva tabla simplex en el lugar que corresponde a P_3 .

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
7P_1 & 6P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_1 & 0 & 0 & 0 & 30P_1 \\
2P_2 & 3P_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_2 & 0 & 0 & 12P_2 \\
0 & -\frac{1}{7}P_3 & \frac{6}{7}P_3 & 0 & -P_3 & 0 & -\frac{6}{7}P_3 & 0 & 0 & 0 & \frac{30}{7}P_3 \\
0 & P_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_4 & 7P_4 \\
1 & \frac{6}{7} & -\frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & \frac{30}{7} \\
0 & \frac{9}{7} & \frac{2}{7} & -1 & 0 & 0 & -\frac{2}{7} & 1 & 0 & 0 & \frac{24}{7} \\
0 & -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} & 0 & -1 & 0 & -\frac{6}{7} & 0 & 1 & 0 & \frac{30}{7} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7
\end{array}
$$

Para convertir en 0 x_1 en P_2 , se multiplica el renglón 1 por el inverso aditivo del valor de x_1 , que en este caso es $-2P_2$, y se suma a P_2 . $-2R_1 + P_2 = P_2'$. El resultado se sustituye en una nueva tabla simplex en el lugar que corresponde a P_2 .

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
7P_1 & 6P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_1 & 0 & 0 & 0 & 30P_1 \\
0 & \frac{9}{7}P_2 & \frac{2}{7}P_2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{7}P_2 & P_2 & 0 & 0 & \frac{24}{7}P_2 \\
0 & -\frac{1}{7}P_3 & \frac{6}{7}P_3 & 0 & -P_3 & 0 & -\frac{6}{7}P_3 & 0 & 0 & 0 & \frac{30}{7}P_3 \\
0 & P_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_4 & 7P_4 \\
1 & \frac{6}{7} & -\frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & \frac{30}{7} \\
0 & \frac{9}{7} & \frac{2}{7} & -1 & 0 & 0 & -\frac{2}{7} & 1 & 0 & 0 & \frac{24}{7} \\
0 & -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} & 0 & -1 & 0 & -\frac{6}{7} & 0 & 1 & 0 & \frac{30}{7} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7
\end{array}
$$

Para convertir en 0 x_1 en P_1 , se multiplica el renglón 1 por el inverso aditivo del valor de x_1 , que en este caso es $-7P_1$, y se suma a P_1 .

$-7R_1 + P_1 = P_1'$. El resultado se sustituye en una nueva tabla simplex en el lugar que corresponde a P_1 .

0	0	P_1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	$\frac{9}{7}P_2$	$\frac{2}{7}P_2$	0	0	0	$-\frac{2}{7}P_2$	P_2	0	0	$\frac{24}{7}P_2$
0	$-\frac{1}{7}P_3$	$\frac{6}{7}P_3$	0	$-P_3$	0	$-\frac{6}{7}P_3$	0	0	0	$\frac{30}{7}P_3$
0	P_4	0	0	0	0	0	0	0	P_4	$7P_4$
1	$\frac{6}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	0	0	$\frac{1}{7}$	0	0	0	$\frac{30}{7}$
0	$\frac{9}{7}$	$\frac{2}{7}$	-1	0	0	$-\frac{2}{7}$	1	0	0	$\frac{24}{7}$
0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$	0	-1	0	$-\frac{6}{7}$	0	1	0	$\frac{30}{7}$
0	1	0	0	0	-1	0	0	0	1	7

Los resultados son:

$$x_1 = \frac{30}{7}, x_2 = 0, s_2^- = \frac{24}{7}, s_3^- = \frac{30}{7}, s_4^- = 7$$

Referencias

Bierman, H., Benini, C. y Hausman, H. (1988). *Análisis cuantitativo para la toma de decisiones*. México: Mc Graw Hill

Render, B., Stair, R. y Hanna, M. (2016). *Métodos cuantitativos para los negocios*. México: Pearson Educación de México

Taha, H. (2017). *Investigación de operaciones*. (Trad. J. Murrieta). México: Pearson Educación de México

Thierauf, R. (2008). *Toma de decisiones por medio de investigación de operaciones*. México: LIMUSA

Créditos

Mtro. José Alberto Castellanos Gutiérrez
Rector del CUCEA

Mtro. José Alberto Becerra Santiago
Secretario Académico

Mtro. César Omar Mora Pérez
Secretario Administrativo

Mtra. Irene Huízar Navarro
Coordinadora de Tecnologías para el Aprendizaje

Mtro. Jonathan Roberto Venegas Barrera
Experto disciplinar

Lic. Ruth Dayra Jaramillo Rodríguez
Diseñadora instruccional

Lic. Claudia Fabiola Olmos de la Cruz
Jefa de Diseño Gráfico

Lic. Laura Belén Cuevas de la Torre
Correctora de estilo

Fecha de elaboración: 12/12/18
Centro Universitario de Ciencias Económico Administrativas
Coordinación de Tecnologías para el Aprendizaje

Unidad de Diseño Educativo
Zapopan, Jalisco 2018

UDE