CUCEA

Modelos de teorías de colas y líneas de espera

1 Modelos de teorías de colas y líneas de espera

1.1 Características de un sistema de colas

1. Llegadas o entrada al sistema

Se consideran los siguientes parámetros

EL TAMAÑO DE LA POBLACIÓN: Se dividen en ilimitados (esencialmente infinitos) o limitados (finitos) cuando las llegadas se toman de una pequeña población.

EL PATRÓN DE LAS LÍNEAS DE ESPERA: Pueden seguir algún patrón conocido o llegar aleatoriamente.

EL COMPORTAMIENTO DE LAS LLEGADAS: Es la decisión que quien está en línea de espera (a recibir el servicio), eludir (no entrar en espera) o rehusarse (desistir de la espera).

2. Disciplina de las líneas de espera

Explica el método usado para determinar el orden con el cual se atiende a los clientes. La disciplina más común es la disciplina FCFS (First Come First Served) es decir, al primero que llega se le atiende primero. En la disciplina LCFS (Last Come First Served) el último en llegar, es primero en salir. Las llegadas más recientes son las primeras en entrar al servicio. El orden, no afecta la llegada de los clientes se le denomina disciplina SIRO (Service In Random Order).

3. La cola o línea de espera

Son limitadas o ilimitadas, existe una disciplina en la cola, se refiere a la regla de atender al cliente que está en línea, el cual recibirá el servicio.

4. La instalación del servicio

Se sugieren dos propiedades básicas

a) Configuración del sistema de servicio

Dependiendo del servicio se divide en: sistema de un sólo canal, con un sólo servidor, o multicanal con dos o más servidores, el segundo se trata del sistema de una sola fase, donde se recibe el servicio en una sola estación. El sistema multifase; se recibe el servicio en diferentes estaciones.

b) El patrón de los horarios del servicio

Pueden ser constantes o aleatorios.

1.1.1 Notación de Kendall

Esta notación tiene la siguiente forma

> Distribución de llegadas/Distribución de tiempos de servicio/Número de canales de servicio abiertos

Donde:
M = Distribución de Poisson del número de ocurrencias
D =Tasa constante (determinística)
G = Distribución general con media y varianza conocidas
E_k = Distribución Erlang con parámetro k

GI = Distribución general independiente
H = Distribución hiperexponencial
c = Número de servidores
d = Orden de atención a los clientes

Así, un modelo de un sólo canal con llegadas de Poisson y tiempos de servicio exponenciales se representaría de la siguiente manera.

$$M/M/1$$

Para agregar un segundo canal se expresa de la siguiente manera.

$$M/M/2$$

1.2 Modelado de procesos de llegada y servicio

1.3 Modelo de un sólo canal, una fase para poblaciones finitas e infinitas

Tiene siete condiciones

1. Las llegadas se atienden sobre una base de PEPS (Primeras Entradas Primeras Salidas).
2. Cada llegada, espera a ser atendida independientemente de la longitud de la fila, es decir, no se elude ni se rehúsa.
3. Las llegadas son independientes de las llegadas anteriores, pero su número promedio no cambia a lo largo del tiempo.
4. Las llegadas se describen con una distribución de probabilidad de Poisson y provienen de una población infinita o muy grande.
5. Los tiempos de servicio, también varían de un cliente al siguiente y son independientes entre sí, pero se conoce su tasa promedio.
6. Los tiempos de servicio ocurren de acuerdo con una distribución de probabilidad exponencial negativa.
7. La tasa de servicio promedio es mayor que la tasa de llegadas promedio.

Hasta que se cumplan las siete condiciones, se puede desarrollar una serie de ecuaciones que definen las características de operación de la cola.

1.3.1 Ecuaciones de colas

λ = número medio de llegadas por periodo
μ = número medio de personas o artículos que se atienden por periodo

1. El número promedio de clientes o unidades en el sistema, L, es decir, el número en la fila, más el número que se está atendiendo.

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

2. El tiempo promedio que un cliente pasa en el sistema, W, es decir, el tiempo que pasa en la fila más el tiempo en el que se le atiende.

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{L}{\lambda}$$

3. El número promedio de clientes en la cola, Lq.

$$Lq = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = L - \rho$$

4. El tiempo promedio que pasa un cliente esperando en la cola Wq.

$$Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{L_q}{\lambda}$$

5. El tiempo promedio de servicio (inverso de la tasa de servicio μ).

$$W_s = W - W_q = \frac{1}{\mu}$$

6. El factor de utilización del sistema ρ (letra griega rho), es decir, la probabilidad que se esté utilizando la instalación de servicio.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

7. Porcentaje de tiempo ocioso, p_0, es decir, la probabilidad de que nadie esté en el sistema.

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

8. La probabilidad de que el número de clientes en el sistema sea mayor que k, $P_{n>k}$.

$$P_{(n>k)} = (\frac{\lambda}{\mu})^{k+1}$$

9. Probabilidad de que un cliente permanezca t unidades de tiempo en el sistema.

$$P_t = e^{-t/w}$$

10. Probabilidad de que un cliente permanezca t unidades de tiempo en la linea de espera.

$$P_{qt} = \rho e^{-t/w}$$

Ejemplo 1. Los representantes del servicio a clientes reciben un promedio de 1625 llamadas por hora. Un representante del servicio a clientes puede atender un promedio de 30 llamadas por hora. Se cuenta con 66 representantes para el servicio al cliente.

a) Determine el valor de las ecuaciones de colas para el problema.

b) Encuentre la probabilidad de que una llamada entre y no pueda ser atendida, y la probabilidad de que no esté siendo atendido ningún cliente.

c) Encuentre la probabilidad de que existan más de 7 personas en el sistema.

d) Probabilidad de que un cliente permanezca 10 minutos en el sistema.

e) Probabilidad de que un cliente permanezca 15 minutos en línea de espera.
Solución
a) Lo primero que tenemos que revisar, es el valor de los parámetros a emplear en el sistema de colas, estos son los valores de λ y μ. El número medio de llamadas que llegan al servicio en el periodo de una hora es de 1625, este dato lo representamos con λ por tanto...

$$\lambda = 1625$$

Otro dato que se proporciona, es el número medio que se pueden atender en el perido de una hora, este dato se representa con la letra μ. El texto menciona que son 66 representantes y cada representante atiende 25 llamadas en una hora; el total de llamadas atendidas es de...

$$\mu = 25\,(66) = 1650$$

Una vez identificado λ y μ se pueden calcular los valores de las características de operación de la cola. La primera característica es L que es el número de clientes que se encuentran en todo el sistema de colas cuya fórmula es ...

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

Sustituyendo los valores de $\lambda = 1625$ y $\mu = 1650$ se tiene...

$$\begin{aligned} L &= \frac{1625}{1650 - 1625} \\ &= \frac{1625}{25} \\ &= 65 \end{aligned}$$

Lo que nos dice que en promedio 65 llamadas se están atiendo.

La segunda característica es W; tiempo promedio que un cliente pasa en todo el sistema de colas, si desconocieramos el valor de L esta característica se calcula...

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Sustituyendo los valores $\lambda = 1625$ y $\mu = 1650 \ldots$

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{1650 - 1625} \\ W &= \frac{1}{25} \\ W &= 0.04 \end{aligned}$$

Este resultado se encuentra en la unidad tiempo de hora, si quisieramos saber a cuántos minutos equivale multiplicamos por 60...

$$0.04\,(60) = 2.4$$

Esto quiere decir que desde el inicio de la llamada, hasta que se termina, demora 2.4 minutos. Si utilizamo el valor L la fórmula para W es...

$$W = \frac{L}{\lambda}$$

Lo sustituimos $L = 65$ y $\lambda = 1625$...

$$\begin{aligned} W &= \frac{65}{1625} \\ &= \frac{1}{25} \\ &= 0.04 \end{aligned}$$

Mismo resultado, con lo que se comprueba que las fórmulas son equivalentes.

La siguiente característica de operación es L_q que es el número de clientes en la cola cuya fórmula es...

$$Lq = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

Considerando los valores $\lambda = 1625$ y $\mu = 1650$ se tiene...

$$\begin{aligned} L_q &= \frac{(1625)^2}{1650\,(1650 - 1625)} \\ L_q &= \frac{2640\,625}{1650\,(25)} \\ L_q &= \frac{2640\,625}{41\,250} \\ L_q &= \frac{4225}{66} \\ L_q &= 64.\,0152 \end{aligned}$$

Por lo que el número de clientes en la cola es de 64.0152.

W_q es la siguiente característica a calcular, esta nos indica el tiempo promedio que pasa un cliente esperando en la cola y su fórmula es...

$$Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

Sustituyendo $\lambda = 1625$ y $\mu = 1650$

$$\begin{aligned} W_q &= \frac{1625}{1625\,(1650 - 1625)} \\ W_q &= \frac{1625}{1650\,(25)} \\ W_q &= \frac{1625}{41250} \\ W_q &= \frac{13}{330} \\ W_q &= 0.0394 \end{aligned}$$

Una forma alterna de calcular W_q es...

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

Se tiene que $L_q = 64.\,0152$ y $\lambda = 1625$ ...

$$\begin{aligned} W_q &= \frac{64.0152}{1625} \\ &= 0.0394 \end{aligned}$$

Mismo resultado que con la fórmula anterior de W_q con lo que vemos que son equivalentes. Y $0.0394\,(60) = 2.\,364$ minutos son los que pasa un cliente en la cola.

La última característica del sistema de colas es W_s, tiempo promedio de servicio...

$$W_s = W - W_q$$

Considerando $W = 0.04$ y $W_q = 0.0394$...

$$\begin{aligned} W_s &= 0.04 - 0.0394 \\ &= 0.0006 \end{aligned}$$

Si no se tiene calculadas W o W_q se puede calcular W_s mediante...

$$W_s = \frac{1}{\mu}$$

Debido a que $\mu = 1650$

$$\begin{aligned} W_s &= \frac{1}{1650} \\ &= 0.0006 \end{aligned}$$

b) En este inciso se nos pregunta la probailidad de que todo el sistema esté ocupado, mismo que se calcula mediante...

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

De $\lambda = 1625$ y $\mu = 1650$ se tiene...

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{1625}{1650} \\
\rho &= \frac{65}{66} \\
\rho &= 0.9849
\end{aligned}$$

Así el sistema está acupado 0.9849 o 98.49% del tiempo. El tiempo de ocio está dado por...

$$\begin{aligned}
P_0 &= 1 - 0.9849 \\
P_0 &= 0.015\,1
\end{aligned}$$

Así la probabilidad de que el sistema se encuente libre es 0.0151 o, 1.51% del tiempo.

c) La probabilidad de que existan más de k clientes (llamadas) en el sistema es...

$$P_{(n>k)} = (\frac{\lambda}{\mu})^{k+1}$$

Para encontrar la probabilidad de que existan más de 7 clientes en el sistema consideramos $k = 7$, $\lambda = 1625$ y $\mu = 1650$

$$\begin{aligned}
P_{(n>7)} &= (\frac{1625}{1650})^{7+1} \\
P_{(n>7)} &= \left(\frac{65}{66}\right)^8 \\
&= 0.885
\end{aligned}$$

Este resultado, nos dice que existe el 88.5% de que exitan más de 7 clientes en el sistema.

d) La probabilidad de que un cliente permanezca t unidades de tiempo en el sistema es...

$$P_t = e^{-t/w}$$

Para nuestro caso tenemos $t = 10$ minutos, debido a que "t" se encuentra en minutos, tenemos que considerar a w también en minutos, por lo que $w = 2.4$; el cálculo de la probabilidad queda...

$$\begin{aligned}
P_{10} &= e^{-10/2.4} \\
&= 0.0155
\end{aligned}$$

La probabilidad de que una llamada demore 10 minutos en el sistema es de 1.55%.

e) La probabilidad de que un cliente permanezca 15 minutos en la línea de espera...

$$P_{qt} = \rho e^{-t/w}$$

El dato que se quiere analizar es $t = 15$ minutos, así $w = 2.4$, $\rho = 0.9849$ y sustituyendo se tiene...

$$\begin{aligned} P_{q15} &= 0.9849e^{-10/2.4} \\ &= 0.0153 \end{aligned}$$

Con lo que la probabilidad de que un cliente permanezca en línea de espera son 15 minutos: 1.53%.

Referencias

Anderson, D., Sweeney, D., Williams, T., Camm, J., Cochran, J., Fry, M. y Ohlmann, J. (2016). *Métodos cuantitativos para los negocios* (13a ed.). (Trad. V. Altamirano). México, D.F.: Cengage Learning Editores.

Izar Landeta, J. (2012). *Investigación de operaciones.* México, D.F.: Editorial Trillas.

Render, B., Stair, R., Hanna, M. y Hale, T. (2016). *Métodos cuantitativos para los negocios* (12a ed.). (Trad. J. Murrieta). México, D.F.: Pearson Educación de México.

Winston, W. (2005). *Investigación de operaciones. Aplicaciones y algoritmos* (4a ed.). (Trad. M. Bruna y F. Sánchez). México: Thomson.

Créditos

Mtro. José Alberto Castellanos Gutiérrez
Rector del CUCEA

Mtro. José Alberto Becerra Santiago
Secretario Académico

Mtro. Cesar Omar Mora Pérez
Secretario Administrativo

Mtra. Irene Huízar Navarro
Coordinadora de Tecnologías para el Aprendizaje

Mtro. Jonathan Roberto Venegas Barrera
Experto disciplinar

Lic. Ruth Dayra Jaramillo Rodríguez
Diseñadora instruccional

Lic. Claudia Fabiola Olmos de la Cruz
Jefa de Diseño Gráfico

Lic. Karen Isabel Juárez Rodríguez
Correctora de estilo

Fecha de elaboración: 12/01/18
Centro Universitario de Ciencias Económico Administrativas
Coordinación de Tecnologías para el Aprendizaje
Unidad de Diseño Educativo
Zapopan, Jalisco 2018

UDE